

MATHEMATISCH CENTRUM

Afd. Toegepaste Wiskunde

Rapport TW nr. ~~14~~ 15

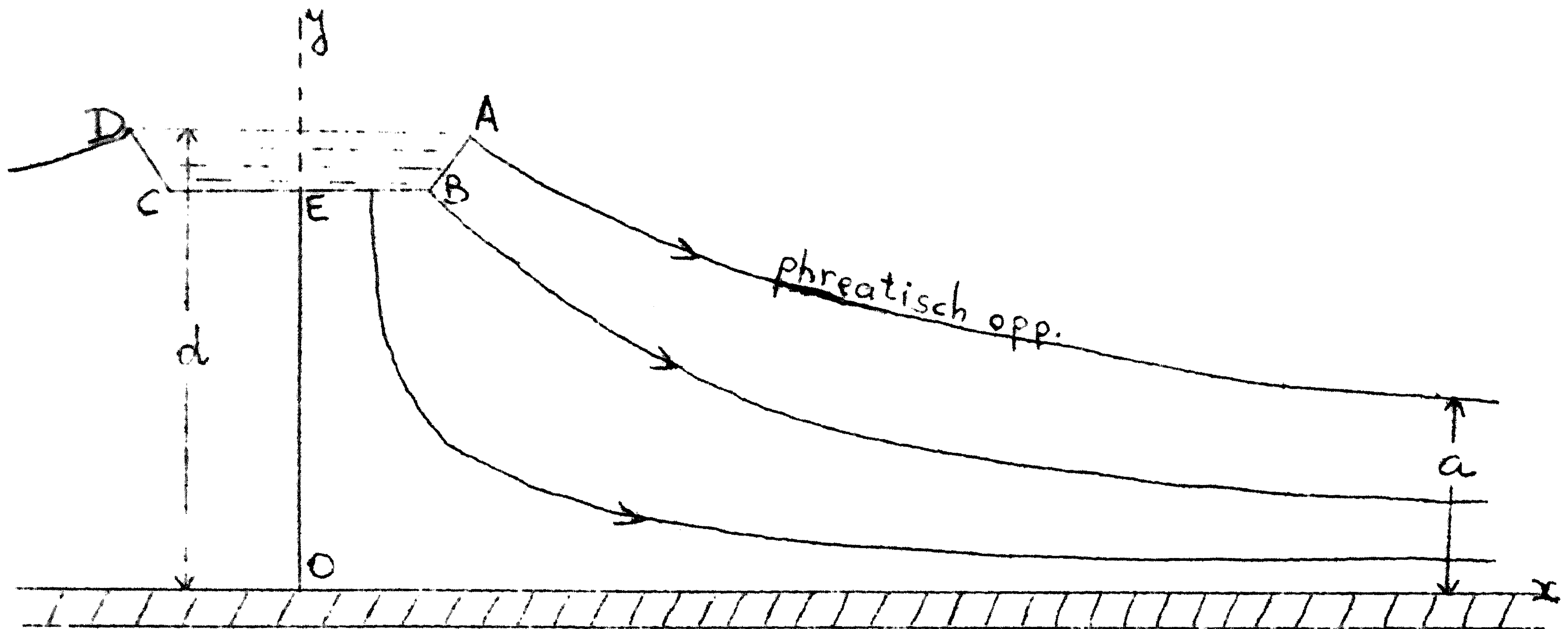
Auteur: J. Kemperman en A. Reiner

Titel: Het stromingspatroon boven een kleilaag
bij aanwezigheid van een kanaal.

Datum: Juni 1951

het stromingspatroon boven een kleilaag bij aanwezigheid van een kanaal.

§ 1. Inleiding. Een homogeen zandpakket met doorlatendheid k meter/dag, wordt aan de onderzijde begrensd door een horizontale, homogene, moeilijk doorlaatbare kleilaag (weerstand c dagen). Dit zandpakket wordt doorsneden door een oneindig lang, horizontaal kanaal, dat geheel met water is gevuld (de afstand van de waterspiegel in het kanaal tot de bovenzijde van de kleilaag duiden we aan met d). Alle dwarsdoorsneden van het kanaal zijn onderling congruent en wel gelijk aan een gegeven gelijkbenig trapezium ABCD.



Beschouwd wordt de resulterende stationnaire stroming door het zandpakket begrensd door phreatisch oppervlak, kanaal en kleilaag. Dit stromingsbeeld is natuurlijk essentieel twee-dimensionaal en symmetrisch t.o.v. de hartlijn van het kanaal.

In het bijzonder interesseert ons de hoeveelheid water Q (m^2 /dag) die per dag (en per strekkende meter) uit het kanaal door het zandpakket wegstroomt.

Aangenomen wordt, tot de zoetwaterpotential ϕ^* onder de kleilaag de constante waarde $\phi^* > 0$ heeft; dit houdt de veronderstelling in, dat het kanaal op deze potential geen merkbare invloed heeft. In het oneindige heeft het phreatische oppervlak dus een hoogte a boven de kleilaag.

Met uitzondering van de relaxatie-methode, is er geen methode beschikbaar, waarmee het gestelde probleem exact kan worden opgelost. Overigens zou een exacte oplossing noodzakelijk zeer geïmpliceerd zijn. In dit rapport wordt een methode aangegeven, waarmee in ieder geval de waarde van Q_0 met voldoende nauwkeurigheid kan worden berekend. Deze methode zal worden geïllustreerd aan het bijzondere geval, waarin de constanten van het beschouwde systeem als volgt zijn gegeven.

* zoetwater-potential = stijghoogte boven kleilaag.

$$(1) \quad d=21; \quad \overline{EF}=1; \quad \overline{AF}=4,5; \quad \overline{BE}=2,5; \quad a=3;$$

$$k=11; \quad c=4000.$$

Men vindt in dit geval

$$Q_0 = 7,25 \text{ m}^2/\text{dag}.$$

Dit is dus de hoeveelheid water, welke per strekkende meter en per dag uit het kanaal weglekt. Aan de andere kant bevat het kanaal per strekkende meter slechts 7 m^3 water en de lek door de kanaalwanden is dus vrij groot. Deze lek kan aanzienlijk worden gereduceerd door de kanaalwanden te bekleden met een b.v. 10 cm dikke kleilaag.

§ 2. De mathematische formulering van het probleem.

Zij (x,y) het rechthoekig coördinatenstelsel, waarvoor de x-as langs de bovenzijde van de kleilaag, en de y-as langs de hartlijn van het kanaal valt. Zij $\varphi(x,y)$ de zoetwater-potentiaal in het punt (x,y) . Laat verder $u(x,y)$ resp. $v(x,y)$ de horizontale resp. verticale component van de stroomsnelheid in het punt (x,y) voorstellen. Dan volgt uit de wet van Darcy

$$(2) \quad \begin{cases} u = -k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v = -k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{cases}.$$

Uit de continuïteitsvergelijking volgt dan

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - k \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad \text{ofwel} \quad \Delta \varphi = 0.$$

Gevraagd wordt nu de phreatische kromme $y=f(x)$ en de functie $\varphi(x,y)$ (gedefinieerd in het gebied $\mathcal{O}_f$, dat begrensd wordt door phreatische kromme, kanaal, y-as en positieve x-as) zodanig te bepalen, dat alle volgende voorwaarden zijn vervuld.

- I Er geldt $\Delta \varphi(x,y) = 0$ in elk punt (x,y) van $\mathcal{O}_f$.
- II Langs de phreatische kromme geldt $\varphi(x,y) = y$.
- III De phreatische kromme is een stroomlijn.
- IV Het gedeelte OE van de y-as is stroomlijn.
- V Op het gegeven kanaal-profiel heeft de functie $\varphi(x,y)$ de constante waarde $\varphi = d$.
- VI Langs de x-as geldt $k \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varphi - a}{c}$.
- VII De phreatische kromme heeft de lijn $y=a$ als horizontale asymptoot.

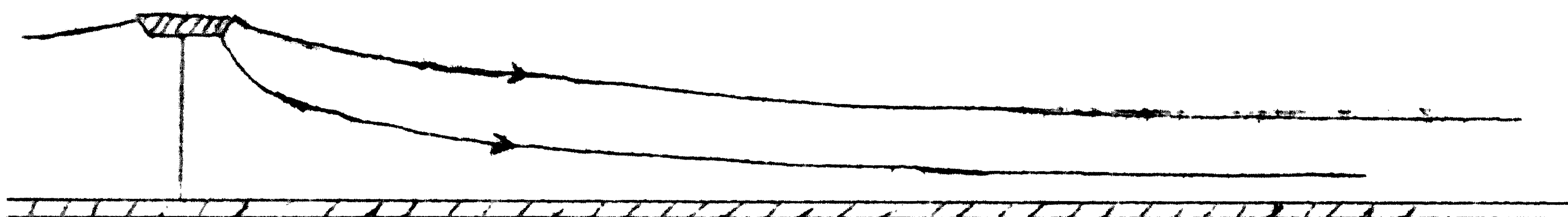
Het is duidelijk dat een exacte oplossing van dit probleem noodzakelijk zeer gecompliceerd is. We zullen daarom volstaan met een benaderde oplossing, die sommige van bovengenoemde voorwaarden exact, doch andere slechts in benadering vervult.

Opm. 1. Men kan bewijzen, dat een functie $\varphi(x,y)$, welke de eerste zes voorwaarden vervult, ook voorwaarde VII vervult. Voorwaarde VII kan dus worden weggelaten.

Opm. 2. In dit rapport staat ons het geval $d > a$ voor ogen. De in dit rapport gegeven (benaderde) oplossingsmethode is evenwel ook geschikt, wanneer $d < a$ m.a.w. wanneer het kanaal als drain fungeert, mits we dan het kweloppervlak verwaarlozen.

§ 3. Een één-dimensionale voorstelling.

Het beschouwde stromingspatroon heeft ongeveer de volgende gedaante.



Elke stroomlijn zal vroeg of laat de kleilaag treffen. Omdat evenwel c zeer groot is ($c \approx 4000$), lopen, op niet te kleine afstand van het kanaal, de stroomlijnen practisch horizontaal. Daar de helling $\frac{dy}{dx}$ van een stroomlijn gelijk is aan $\frac{v}{u}$, is aldaar $v = -k \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ klein t.o.v. $u = -k \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, d.w.z. $\varphi(x,y)$ verandert veel sterker met x dan met y . Wanneer we nu de veronderstelling invoeren, dat $\varphi(x,y)$ slechts van x afhankelijk is, dan maken we op voldoende afstand van het kanaal slechts een kleine fout. Wanneer $y=f(x)$ de vorm van de phreatische kromme voorstelt, dan geldt langs de phreatische kromme

$$(3) \quad \varphi = f(x).$$

Onder bovengenoemde onderstelling geldt (3) voor elk punt (x,y) op voldoende afstand van het kanaal. De continuïteitsvergelijking wordt nu

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \left(k f \frac{df}{dx} \right) = \frac{f-a}{c}.$$

Stel nu

$$(5) \quad h(x) = \left(f \frac{df}{dx} \right)^2$$

ofwel

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sqrt{h}}{f};$$

dan volgt uit (4)

$$\frac{f-a}{kc} = \frac{d}{dx} \sqrt{h} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \quad \frac{dh}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{h}} \frac{dh}{df} \frac{df}{dx} = \frac{1}{2f} \frac{dh}{df}$$

ofwel

$$\frac{dh}{df} = \frac{2}{kc} (f^2 - af).$$

Door integratie volgt

$$(6) \quad h = \frac{2}{kc} \left(\frac{1}{3} f^3 - \frac{1}{2} af^2 + b \right),$$

waarin b een integratieconstante is. Nu heeft de phreatische kromme $y=f(x)$ de lijn $y=a$ als horizontale asymptoot d.w.z. voor $x=\infty$ is $f=a$ en $h=0$. Dus volgt uit (6), dat $b = \frac{1}{6} a^3$. Wegens (5) en (6) hebben we nu

$$\left(f \frac{df}{dx} \right)^2 = \frac{1}{3kc} (f-a)^2 (2f+a)$$

ofwel

$$(7) \quad \frac{dx}{df} = -\sqrt{3kc} \frac{f}{(f-a)\sqrt{2f+a}}$$

(als x toeneemt, dan neemt $f(x)$ af, zodat $\frac{dx}{df} < 0$; vandaar het min-teken).

Door integratie van (7) vinden we

$$(8) \quad x - x_0 = p(f),$$

waarin

$$(9) \quad p(f) = \sqrt{akc} \left[\ln(2a+f+\sqrt{6af+3a^2}) - \ln(f-a) - \sqrt{3+\frac{6f}{a}} \right]$$

en waarin x_0 een integratieconstante voorstelt.

Zij $Q(x)$ de hoeveelheid water, die per dag (en per strekkende meter) door een verticale doorsnede met abscis x stroomt. Indien veronderstelling (3) in goede benadering opgaat, dan geldt

$$Q(x) = -kf \frac{df}{dx},$$

en wegens (7) hebben we nu

$$(10) \quad Q(x) = q(f),$$

waarin

$$(11) \quad q(f) = \sqrt{\frac{k}{3c}} (f-a)\sqrt{2f+a}.$$

De vorm $y=f(x)$ van het phreatische oppervlak is, op een onbekende verschuivingsconstante x_0 na, door (8) volkomen bepaald.

Opm. Voor zeer grote positieve waarden x (dus voor $f \sim a$) hebben we wegens (9)

$$p(f) \sim \sqrt{akc} [\ln(6a) - \ln(f-a) - 3]$$

en volgt dus uit (10)

$$f(x) \sim a + C \exp\left(-\frac{x-x_0}{\sqrt{akc}}\right)$$

met $C = 6ae^{-3}$. Dit drukt dus uit, dat de phreatische kromme exponentieel nadert tot zijn asymptoot $y=a$. Uit (10) en (11) volgt nu voor grote waarden x

$$Q(x) \sim \sqrt{\frac{ka}{c}} (f-a) \sim C \sqrt{\frac{ka}{c}} \exp\left(-\frac{x-x_0}{\sqrt{akc}}\right).$$

Voor de speciale keuze *

$a=3$; $k=11$; $c=4000$

zijn de (door (9) en (11) gedefinieerde) functies $p(f)$ en $q(f)$ in de onderstaande tabel weergegeven.

	$p(f)$	$q(f)$
f	∞	0
$\downarrow$		
3,0		
3,1	+788,70	0,0092
4	-117,50	0,1004
5	-441,80	0,2183
6	-657,44	0,3518
7	-826,86	0,4993
8	-969,94	0,6599
9	-1095,69	0,8325
10	-1209,02	1,0164
11	-1312,92	1,2111
12	-1409,38	1,4159
13	-1499,77	1,6304
14	-1585,08	1,8543
15	-1666,09	2,0871
16	-1743,37	2,3285
17	-1817,39	2,5783
18	-1888,54	2,8362
19	-1957,11	3,1018
20	-2023,38	3,3751
20,49	-2055,07	3,5118
21	-2087,54	3,6558

In het gebied, waar de ~~een~~-dimensionale voorstelling houdbaar is (dus waar veronderstelling (3) opgaat) wordt de phreatische kromme $y=f(x)$ door (8) gegeven; hierin is x_0 een onbekende constante. Aldaar valt dus deze phreatische kromme, na verschuiving over de onbekende afstand x_0 , samen met het rechterdeel van de kromme $x=p(f)$. De laatste kromme is in grafiek I weergegeven.

In hetzelfde gebied geldt (10), wanneer f de plaatselijke hoogte van het phreatische oppervlak voorstelt. In grafiek II is de functie $q(f)$ grafisch voorgesteld.

 *Ook de ondergenoemde grafieken I, II, en III behoren bij dit speciale geval.

Tenslotte wordt in het genoemde gebied de functie $Q = Q(x)$ gegeven door de parameterrepresentatie

$$Q = q(f) ; x - x_0 = p(f).$$

In grafiek III is de kromme weergegeven met parameterrepresentatie

$$Q = q(f) ; x = p(f).$$

Deze kromme valt dus, op een verschuivingsconstante x_0 na, samen met de kromme $Q = Q(x)$.

De vraag is nu in hoeverre men het bovenaangegeven één-dimensionale beeld kan gebruiken voor de berekening van de hoeveelheid water Q_0 , die per dag uit het kanaal wegstroomt. Nu is op voldoende grote afstand van de y-as (b.v. $x \gg \xi$ met $\xi \sim d$) de stroming praktisch lineair d.w.z. de hoek tussen de stroomlijnen en de x-as is klein. Wanneer $f(\xi)$ bekend zou zijn, dan kon men met behulp van (9) de hoeveelheid water $Q(\xi)$ bepalen, welke per dag door de doorsnede $x = \xi$ stroomt. Verder geldt

$$(12) \quad Q_0 = 2[Q(\xi) + R(\xi)],$$

Waarin $R(\xi)$ de hoeveelheid water voorstelt, welke per dag door het stuk $[0, \xi]$ van de kleilaag sijpelt. We merken op, dat $R(\xi)$ vrij klein is en in eerste instantie mag worden verwaarloosd. Dus resteren de vragen:

1. Hoe gaat men na in hoeverre voor $x = \xi$ de stroomlijnen reeds goed horizontaal lopen?
2. Hoe bepaalt men $f(\xi)$?

Voor de bepaling van $f(\xi)$ (=hoogte van het phreatische oppervlak in het punt $x = \xi$) moet men essentieel de vorm en grootte van het kanaal in rekening brengen. Was dit n.l. niet het geval, dan zou $f(\xi)$ en dus Q_0 onveranderd blijven, wanneer het kanaal door een willekeurig smal slootje (met de waterspiegel op hoogte d boven de kleilaag) zou worden vervangen. Langs het profiel van dit slootje blijft echter de potentiaal constant (n.l. $\varphi = d$). In het limietgeval ontstaat een lijn-bron met een eindige potentiaal $\varphi = d$ in de bron. Een dergelijke bron levert evenwel in het geheel geen water.

Blijkbaar is de grootte van het kanaal ter dege van belang. Kleine wijzigingen in de vorm van het kanaal evenwel zullen Q_0 nauwelijks wijzigen en zullen het stromingsbeeld alleen beïnvloeden in de directe omgeving van het kanaal.

Tenslotte een antwoord te vinden op bovengenoemde vragen, zal in § 4 en § 5 een stromingspatroon worden ontworpen voor de onmiddellijke omgeving van het kanaal. Dit patroon is essentieel twee-dimensionaal en houdt rekening met de vorm van het kanaal (de lineariseringsstelling (3) geldt zeker niet in de omgeving van het kanaal). Overigens voldoet dit patroon niet exact, doch slechts in goede benadering, aan

de in § 2 genoemde voorwaarden.

Het zal blijken, dat in de door (1) gegeven situatie het phreatisch oppervlak nabij het kanaal slechts langzaam daalt. Dan geldt dus in goede benadering $f(\xi) \sim 21$ en (zie bovenstaande tabel) $Q(\xi) \sim 3,6$. Wegens (12) hebben we dus $Q_0 \sim 7$ d.w.z. uit het kanaal vloeit per strekkende meter en per dag ongeveer 7 m^3 water weg door de onderliggende zandlaag.

§ 4. Het stromingsbeeld in de omgeving van het kanaal.

Zij $\xi > 0$ een zodanig groot getal, dat voor $x \geq \xi$ de stroomlijnen van het gezochte stromingspatroon vrijwel horizontaal lopen. Dan wordt voor $x \geq \xi$ de situatie voldoende nauwkeurig weergegeven door de één-dimensionale voorstelling van § 3. Deze voorstelling is bepaald op één vrijheidsgraad na n.l. de hoogte $f(\xi)$ van het phreatisch oppervlak in het punt $x = \xi$.

Het stromingsbeeld in de omgeving van het kanaal ($0 \leq x \leq \xi$) wordt beschreven door de z.g. potentiaalfuncties $\Phi(x, y)$, welke de componenten u en v van de stroomsnelheid bepaalt.

$$u = -k \frac{\partial \Phi}{\partial x} ; \quad v = -k \frac{\partial \Phi}{\partial y} .$$

Deze functie $\Phi(x, y)$ moet aan de volgende voorwaarden voldoen (vgl. § 2)

1. Er bestaat een functie $\Psi(x, y)$ (de zgn. stroomfunctie) met

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} ;$$

(deze voorwaarde is equivalent met de voorwaarde $\Delta \Phi = 0$). De lijnen $\Psi = \text{constant}$ zijn juist de stroomlijnen.

2. Langs de stroomlijn door het eindpunt A van het kanaal (de phreatische kromme) geldt $\Phi(x, y) = y$.

3. Op het kanaalprofiel ABE geldt $\Phi(x, y) = d$.

4. Het gedeelte OE van de y -as is stroomlijn.

5. Voor $y=0$ (en $0 \leq x \leq \xi$) geldt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\Phi - a}{kc} .$$

6. Zij f de hoogte van de phreatische kromme voor $x = \xi$ (m.a.w. (ξ, f) ligt op de stroomlijn door A) en zij

$$Q(\xi) = \int_0^f u(\xi, y) dy = -k \int_0^f \frac{\partial \Psi(\xi, y)}{\partial y} dy = k [\Psi(\xi, 0) - \Psi(\xi, f)]$$

de hoeveelheid water, welke tussen de kleilaag en de phreatische kromme per dag door de doorsnede $x = \xi$ stroomt. Dan moet gelden

$$Q(\xi) = q(f),$$

waarin $q(f)$ door (11) wordt gegeven.

De laatste voorwaarde moet worden gesteld, teneinde een aansluiting mogelijk te maken tussen het twee-dimensionale stromingsbeeld voor $x \leq \xi$ en de één-dimensionale voorstelling van het stromingsbeeld voor $x \geq \xi$.

De constante ξ is nog enigszins vrij, maar moet in elk geval zodanig zijn, dat voor $x = \xi$ de stroomlijnen $\psi = \text{constant}$ nagenoeg horizontaal zijn. Dat is doorgaans reeds het geval als $\xi \sim d$. Aan de andere kant is voor $\xi \sim d$ de hoeveelheid water $R(\xi)$, welke per dag door het deel $[0, \xi]$ van de kleilaag sijpelt, verwaarloosbaar klein. Immers, de potentiaal $\phi(x, 0)$ aan de bovenzijde van de kleilaag is $\phi \sim d$. Dus

$$R(\xi) \leq \xi \frac{d-a}{c}.$$

In de door (1) gegeven situatie en voor $\xi = d$ is hierin het rechterlid gelijk aan

$$21 \frac{18}{4000} = 0,0945.$$

Wanneer dus het deel $[-\xi, \xi]$ van de kleilaag door een ondoorlaatbare laag wordt vervangen, dan kan noch Q_0 , noch het stromingspatroon hierdoor merkbaar veranderen (mits natuurlijk Q_0 voldoende groot is).

Zonder bezwaar mogen we dus voorwaarde 5 vervangen door *)

5a. Voor $y=0$ en $0 \leq x \leq \xi$ geldt $\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ d.w.z. het interval $[0, \xi]$ van de x-as is stroomlijn.

Vervolgens merken we op, dat voor de berekening van Q_0 de exacte vorm van het kanaalprofiel (in casu een gelijkbenig trapezium ABCD) niet van direct belang is. En wel is aannemelijk, dat Q_0 slechts gering wordt gewijzigd, wanneer dit profiel wordt vervangen door een ander dat in grootte, vorm en ligging weinig verschilt van het genoemde trapezium. We zullen ons beperken tot profielen met vergelijking

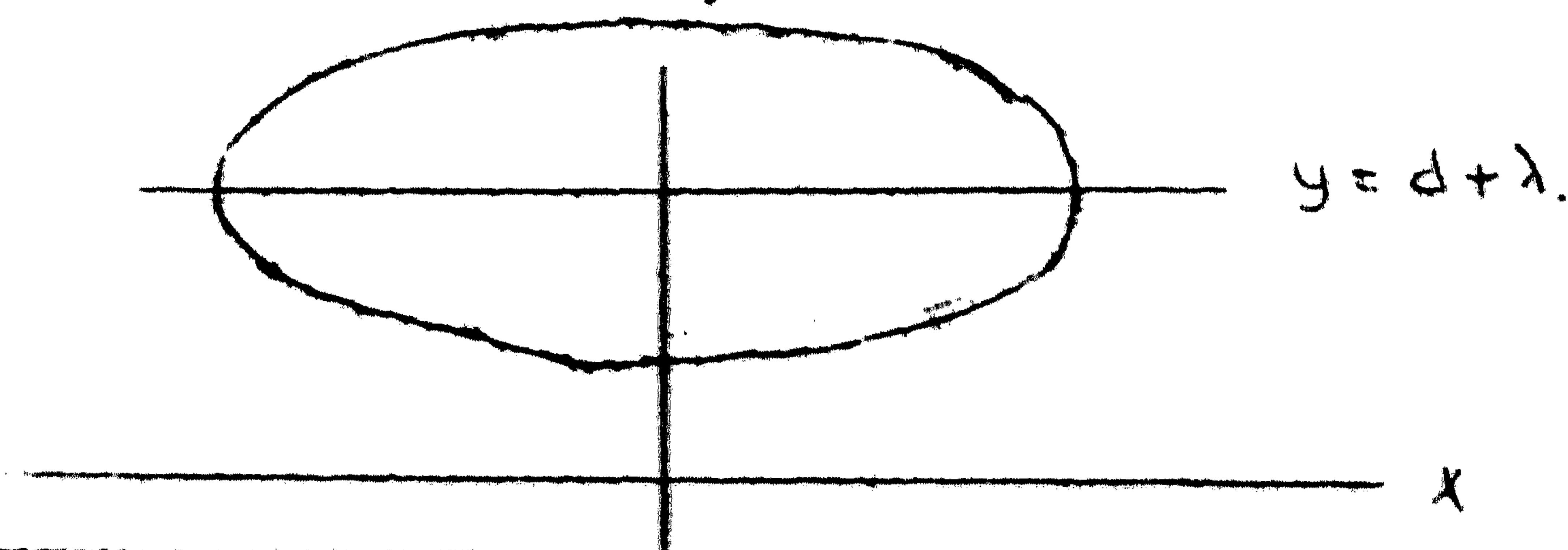
$$(13) \quad \left[\frac{\sinh \alpha x \sin \alpha y}{K} \right]^2 + \left[\frac{\cosh \alpha x \cos \alpha y}{L} \right]^2 = 1.$$

Hierin is $0 < L < K$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2d}$ en $0 < y < \frac{\pi}{\alpha}$.

Stellen we

$$(14) \quad \alpha = \frac{\pi}{2(d+\lambda)}$$

dan is een door (13) gegeven kromme symmetrisch t.o.v. de lijnen $x=0$ en $y=d+\lambda$.



*) De door deze vervanging gemaakte (kleine) fout in Q_0 zal achteraf nog grotendeels worden gecorrigeerd.

Verder is zo 'n kromme ovaalvormig en wel langgerekt in de richting van de x-as. Het zal spoedig duidelijk worden, waarom we juist het stelsel (13) kiezen.

We vervangen nu voorwaarde 3 door

3a. Op een geschikt gekozen, door A, B, C en D gaande, kromme van het stelsel (13) geldt $\varphi(x,y)=d$.

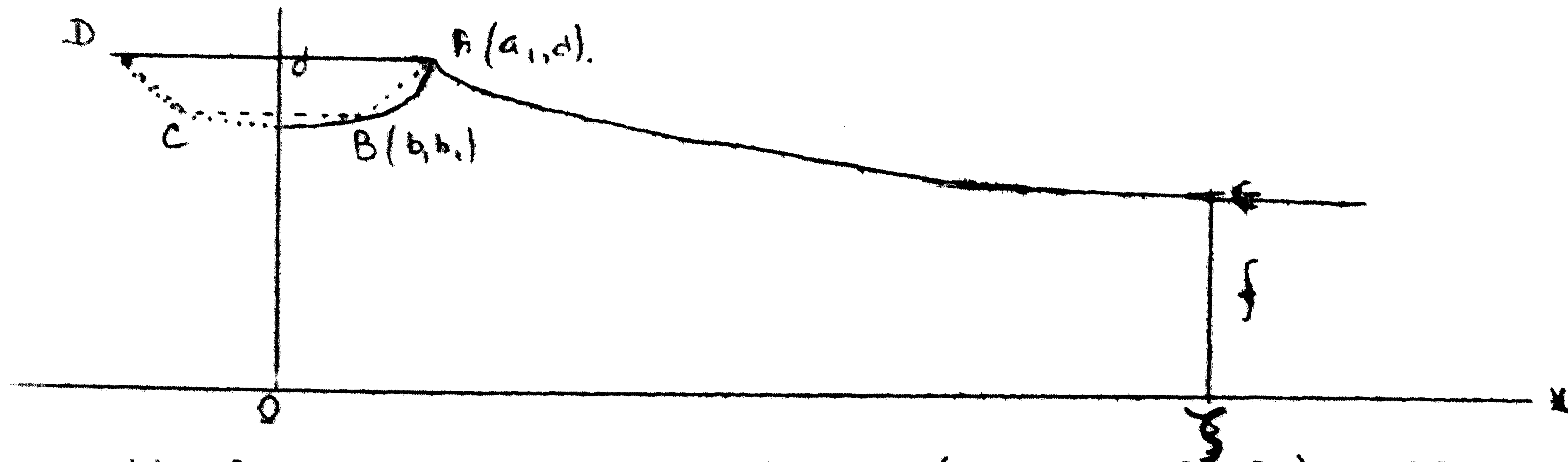
De overgang van voorwaarde 3 op voorwaarde 3a betekent dus, dat we het kanaalprofiel ABCD vervangen door een boogvormig profiel gaande door de punten A, B, C en D. Dit zal in het algemeen de uitstroming Q_0 weinig beïnvloeden.

Er zijn eigenlijk weinig bezwaren tegen de overgang van voorwaarde 3 op 3a en van 4 op 4a. Immers, Q_0 wordt door deze overgang nauwelijks beïnvloed en verder heeft het gewijzigde probleem (ander kanaalprofiel; kleilaag voor een klein gedeelte ondoorlaatbaar) nog steeds een reële fysische betekenis. Zoals bij alle problemen waarin een vrij oppervlak optreedt, schuilt de essentiële moeilijkheid in voorwaarde 2: langs de gehele (nog onbekende) stroomlijn door A (=phreatische kromme) moet $\varphi(x,y)=y$ gelden. We mogen evenwel verwachten, dat het stromingspatroon weinig wordt veranderd, wanneer we voorwaarde 2 vervangen door de zwakkere condities

2a. In de eindpunten $A(a_1, d)$ en $G(\xi, f)$ van de stroomlijn door A geldt $\varphi(x,y)=y$ m.a.w.

$$\varphi(a_1, d) = d \quad ; \quad \varphi(\xi, f) = f.$$

Overigens is de voorwaarde $\varphi(a_1, d) = d$ reeds in 3a bevat. Opgemerkt moet nog worden, dat na vervanging van voorwaarde 2 door 2a het nieuwe probleem zeker niet meer eenduidig is bepaald. De werkwijze is nu, uit alle mogelijke (onderling weinig verschillende) oplossingen de meest eenvoudige te kiezen.

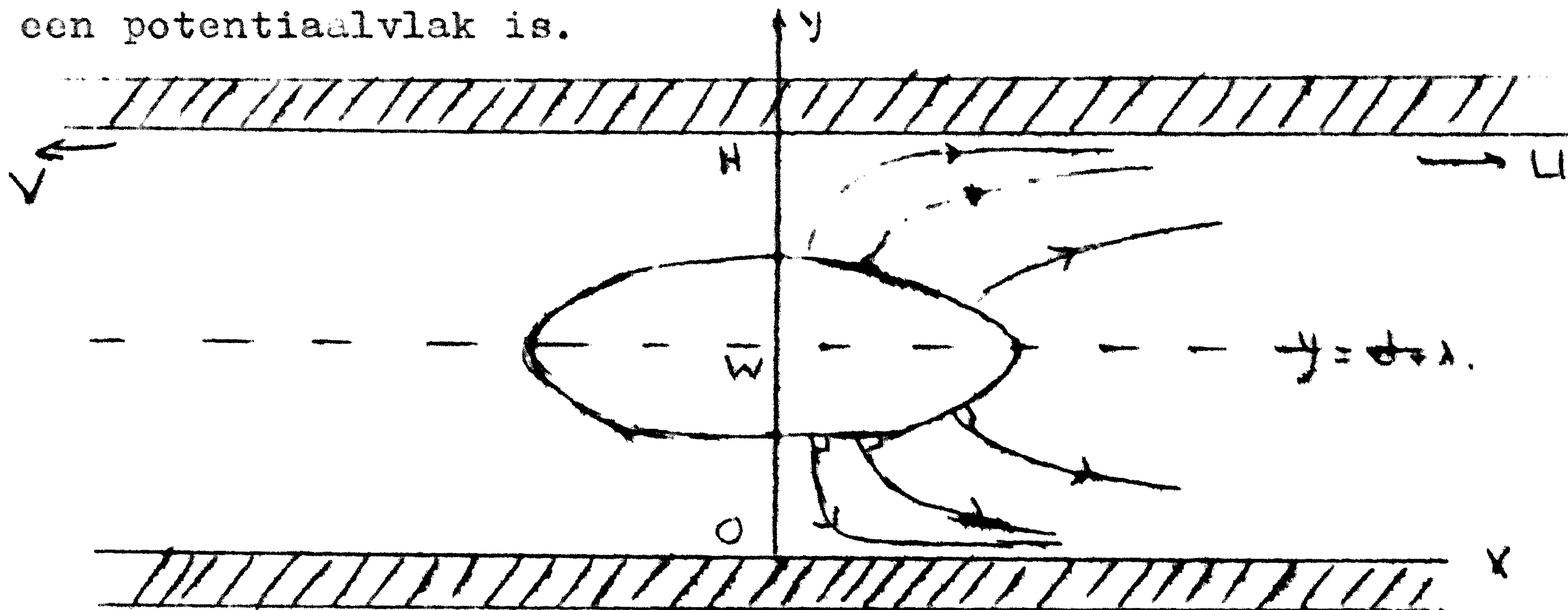


Samenvattend, moeten we nu het volgende (vereenvoudigde) probleem oplossen. Bepaal (voor $0 \leq x \leq \xi$) een functie $\varphi(x,y)$ welke voldoet aan

de voorwaarden 1, 2a, 3a, 4, 5a en 6. De positieve constante ζ kan nog vrij worden gekozen. Evenwel mag ζ niet te klein zijn, opdat voor $x = \zeta$ de stroomlijnen vrijwel horizontaal lopen. Aan de andere kant mag ζ niet te groot zijn, opdat bij de overgang van 4 op 4a geen merkbare fout in Q_0 wordt geïntroduceerd. In het algemeen zullen beide condities zijn vervuld, wanneer $\zeta \rightarrow d$.

§ 5. Oplossing van het vereenvoudigde probleem.

Beschouw een cylinder met vergelijking (13) gelegen tussen twee ondoorlaatbare kleilagen $y=0$ en $y=2(d+\lambda) = \frac{\pi}{\alpha}$. Neem aan, dat deze cylinder op een zodanige wijze water produceert, dat zijn oppervlak een potentiaalvlak is.



Zij $\varphi(x,y)$ de bijbehorende potentiaalfunctie. Deze voldoet aan de bovengenoemde voorwaarden 1, 4 en 5a. Verder is $\varphi(x,y)$ constant op een kromme van het stelsel (13) (vgl. voorwaarde 3a). Tenslotte, door het tweetal ondoorlaatbare kleilagen, zullen alle stroomlijnen zeer spoedig vrijwel horizontaal lopen. Door geschikte keuze van K, L, λ en van de waterhoeveelheid, welke per dag uit de cylinder stroomt, kunnen we zorgen dat $\varphi(x,y)$ aan alle voorwaarden van het vereenvoudigde probleem voldoet.

Allereerst zullen we aangeven, hoe men de zojuist ingevoerde functie $\varphi(x,y)$ kan berekenen. Door de keuze van het stelsel (13) is deze berekening betrekkelijk eenvoudig (vandaar deze keuze).

De transformatie

$$(15) \quad \begin{aligned} x' &= \sinh \alpha x \sin \alpha y \\ y' &= \cosh \alpha x \cos \alpha y, \end{aligned}$$

waarin α door (14) wordt gegeven, beeldt de strook $0 \leq y \leq 2(d+\lambda)$ in het (x,y) -vlak conform af op het totale (x',y') -vlak $\star$.

$\star$ Dat de afbeelding conform is, volgt uit

$$ix' + y' = \cosh \alpha (x + iy).$$

$$(19) \quad \left[\frac{x'}{c \cos \eta} \right]^2 - \left[\frac{y'}{c \sin \eta} \right]^2 = 1$$

(=halve hyperbolk tak confocaal met (16)). De potentiaal op de potentiaallijn (18) wordt gegeven door

$$(20) \quad \varphi = -\rho \xi + \sigma_1$$

en de (constante) waarde van de stromingsfunctie op de stroomlijn (19) door

$$(21) \quad \psi = -\rho \eta + \sigma_2$$

Hierin zijn ρ , σ_1 en σ_2 van ξ en η onafhankelijke constanten. Door (15) en (17) wordt aan elk punt (x,y) éénduidig een getallenpaar (ξ, η) toegevoegd. Dan worden de waarden van φ en ψ in het punt (x,y) door (20) en (21) gegeven.

We gaan nu over tot de oplossing van het vereenvoudigde probleem: een functie $\varphi(x,y)$ te vinden welke de voorwaarden 1, 2a, 3a, 4, 5a en 6 vervult. En wel zullen we trachten dit te bereiken met behulp van de zojuist behandelde potentiaalfunctie $\varphi(x,y)$ door een geschikte keuze van de constanten K, L, λ, ρ en σ_1 (σ_2 is niet van belang).

Voorlopig nemen we aan, dat de positieve constante λ en dus α (zie (14)) reeds bekend is. Stellen we voorwaarde (zie 3a), dat de kromme (13) door de punten $A(a_1, d)$ en $B(b_1, b_2)$ gaat, dan kunnen K en L worden berekend; wegens de symmetrie t.o.v. de y -as gaat deze kromme ook door de punten C en D . Vervolgens bepalen we c en ξ_0 uit

$$K = c \cosh \xi_0 \quad \text{en} \quad L = c \sinh \xi_0.$$

De potentiaal op de gekozen kromme (13) is wegens (20) gelijk aan $\sigma_1 - \rho \xi_0$ en moet wegens conditie 3a gelijk zijn aan d . Dit geeft de betrekking

$$(22) \quad d = \sigma_1 - \rho \xi_0.$$

Wanneer aan (22) voldaan is, dan vervult de functie $\varphi(x,y)$ (genoemd aan het begin van deze paragraaf) reeds de voorwaarden 1, 3a, 4 en 5a.

Zij η_0 de parameter van de door $A(a_1, d)$ gaande stroomlijn (ook wel "phreatische kromme" genoemd). Wegens (15) en (17) kan deze berekend worden uit

$$\cosh \alpha a_1 \cos \alpha d = c \sinh \xi_0 \sin \eta_0$$

($0 < \eta_0 < \pi/2$). Verder is $\eta = \pi/2$ de parameter van de stroomlijn, welke langs OW en de positieve x -as valt. De hoeveelheid water, welke per dag tussen de juist genoemde stroomlijnen wegstroomt is wegens (21) gelijk aan

$$k \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \eta_0 \right),$$

wanneer k de doorlaatbaarheid van het medium voorstelt.

De phreatische kromme (=stroomlijn door A) heeft wegens (15) en (19) de vergelijking

$$\left[\frac{\sinh \alpha x \sin \alpha y}{c \cos \eta_0} \right]^2 - \left[\frac{\cosh \alpha x \cos \alpha y}{c \sin \eta_0} \right]^2 = 1,$$

en wel moeten we dat deel van deze kromme nemen, waarop $x > 0$ en $0 < y \leq d + \lambda$. Uit deze vergelijking berekent men gemakkelijk de coördinaat f van het punt G op deze kromme met abscis ξ . De hoeveelheid water $Q(\xi)$, welke per dag de doorsnede $x = \xi$ passeert tussen de kleilaag en de phreatische kromme wordt gegeven door

$$Q(\xi) = k \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \eta_0 \right).$$

Wegens voorwaarde 6 stellen we nu de eis

$$Q(\xi) = q(f)$$

ofwel

$$(23) \quad k \varphi \left(\frac{\pi}{2} - \eta_0 \right) = \sqrt{\frac{k}{3c}} (f-a) \sqrt{2f+a}.$$

Tenslotte moet voorwaarde 2a nog vervuld zijn, d.w.z. er moet gelden $\varphi(\xi, f) = f$ (de voorwaarde $\varphi(a_1, d) = d$ is reeds bevat in (22)). Zij ξ_1 de parameter van de door G(ξ, f) gaande ~~stroomlijn~~ ^{potentiële}. Deze kan wegens (15) en (17) worden berekend uit

$$\cosh \alpha \xi \cos \alpha f = c \sinh \xi_1 \sin \eta_0.$$

Volgens (20) geldt $\varphi(\xi, f) = \sigma_1 - \rho \xi_1$. Aldus vinden we als laatste voorwaarde

$$(24) \quad \sigma_1 - \rho \xi_1 = f.$$

Combinatie van (22) en (24) geeft

$$(25) \quad \rho = \frac{d-f}{\xi_1 - \xi_0}$$

($\rho > 0$) en wegens (23) volgt nu de belangrijke betrekking

$$(26) \quad k \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \eta_0 \right) (d-f)}{\xi_1 - \xi_0} = \sqrt{\frac{k}{3c}} (f-a) \sqrt{2f+a} = q(f).$$

Indien $\lambda > 0$ en $\xi \sim d$ zodanig zijn gekozen, dat aan (25) voldaan is, dan kunnen ρ en σ_1 zodanig worden bepaald, dat (22), (23) en (24) simultaan gelden d.w.z. de resulterende functie $\varphi(x, y)$ vervult nu alle voorwaarden 1, 2a, 3a, 4, 5a en 6 en is dus een oplossing van het gestelde (vereenvoudigde) probleem. En wel wordt wegens (20), (22) en (25) deze functie gegeven door

$$(27) \quad \varphi(x, y) = d - \frac{d-f}{\xi_1 - \xi_0} (\xi - \xi_0),$$

waarin ξ de parameter voorstelt van de door (x,y) gaande potentiaal-
lijn met vergelijking (zie (15) en (19))

$$\left[\frac{\sinh \alpha x \sin \alpha y}{c \cosh \xi} \right]^2 + \left[\frac{\cosh \alpha x \cos \alpha y}{c \sinh \xi} \right]^2 = 1,$$

(waarin $x \geq 0$, $0 \leq y \leq d + \lambda$).

De hoeveelheid water Q_0 , welke per dag uit het kanaal weglekt,
wordt gegeven door

$$(28) \quad Q_0 = 2q(f).$$

Teneinde de fout te corrigeren, gemaakt bij de overgang van voorwaar-
de 5 op 5a, kunnen we (28) beter vervangen door

$$(29) \quad Q_0 = 2[q(f) + R(\xi)],$$

waarin

$$(30) \quad R(\xi) = \frac{1}{c} \int_0^\xi [\varphi(x,0) - a] dx$$

een goede benadering is van de hoeveelheid water, die per dag door
het deel $[0, \xi]$ van de kleilaag sijpelt. Hierin wordt $\varphi(x,0)$ berekend
uit (27); men laat gemakkelijk zien, dat de parameter ξ van de poten-
tiaallijn door $(x,0)$ gevonden wordt uit

$$(31) \quad \sinh \xi = \frac{1}{c} \cosh \alpha x.$$

Zoals reeds vroeger werd opgemerkt, is in het algemeen de correctie
 $R(\xi)$ slechts een kleine grootheid.

Aan de hand van het voorgaande krijgen we nu het volgende bereke-
ningsschema.

A. Kies een positief getal λ (veelal is λ klein) en stel

$$\alpha = \frac{\pi}{2(d+\lambda)}.$$

B. Bepaal $K > 0$ en $L > 0$ zodanig, dat de punten $A(a_1, d)$ en $B(b_1, b_2)$
op de kromme (13) liggen (men moet daartoe K^{-2} en L^{-2} oplossen uit
een tweetal lineaire vergelijkingen in twee onbekenden).

C. Bepaal c en ξ_0 uit

$$K = c \cosh \xi_0 \quad \text{en} \quad L = c \sinh \xi_0.$$

D. Bereken vervolgens η_0 ($0 < \eta_0 < \pi/2$) uit

$$\cosh \alpha a_1 \cos \alpha d = c \sinh \xi_0 \sin \eta_0.$$

E. De "phreatische kromme" heeft nu de vergelijking

$$\left[\frac{\sinh \alpha x \sin \alpha y}{c \cos \eta_0} \right]^2 - \left[\frac{\cosh \alpha x \cos \alpha y}{c \sin \eta_0} \right]^2 = 1,$$

waarin $x > 0$ en $0 < y \leq d$. Kies hierop een punt $G(\xi, f)$ met $\xi \sim d$ en $0 < f < d$. Bepaal hierbij de (van ξ afhankelijke) grootheid ξ_1 uit

$$\cosh \alpha \xi \cdot \cos \alpha f = c \sinh \xi_1 \sin \eta_0.$$

Tracht nu ξ (met $\xi \sim d$) zodanig te kiezen, dat aan (26) voldaan is. Lukt dit, dan geeft (28) de uitstroming Q_0 uit het kanaal. Een betere benadering van Q_0 vindt men uit (29) en (30); in (30) bepaalt men $\varphi(x, 0)$ met (27) en (31).

Verder wordt de potentiaalfunctie $\varphi(x, y)$ nabij het kanaal gegeven door (27) en worden de potentiaallijnen en stroomlijnen berekend met (15), (18) en (19).

In principe moet men ook nog nagaan of voor $x = \xi$ de stroomlijnen van het gevonden twee-dimensionale stromingspatroon werkelijk ongeveer horizontaal zijn. Dit is evenwel meestal het geval.

F. Leid de voorgaande stap E niet tot een resultaat, dan moet men een andere waarde λ kiezen, en het procédé herhalen.

Wat betreft de keuze van λ geven we nog de volgende richtlijnen:

1. De grootheid λ neemt toe, als het (werkelijke) phreatische oppervlak in de omgeving van het kanaal sneller daalt, dus als

- a. De doorlaatbaarheid k afneemt.
- b. De weerstand c van de kleilaag afneemt.
- c. Het kanaal smaller wordt.

Uit (26) blijkt, dat het phreatisch oppervlak nabij het kanaal (en λ) wat betreft de grootheden k en c alleen van het product kc afhangt. Dit geldt overigens ook in de één-dimensionale voorstelling, zoals blijkt uit (9).

2. Indien het kanaal voldoende breed is en kc voldoende groot, dan daalt het phreatisch oppervlak nabij het kanaal slechts langzaam, en is λ een kleine positieve grootheid. Een goede eerste benadering van λ wordt in dit geval gevonden met behulp van

$$(32) \quad \lambda = \frac{2q(d)}{k\pi} \frac{\theta}{1 - \theta^2 \tanh^2 \beta a_1},$$

waarin $\beta = \frac{\pi}{2d}$ en waarin θ bepaald wordt uit

$$(33) \quad \theta = \frac{\cosh \beta b_1 \cos \beta b_2}{\sqrt{\sinh^2 \beta a_1 - \sinh^2 \beta b_1 \sin^2 \beta b_2}}$$

Hierin zijn a_1 en d resp. b_1 en b_2 de coördinaten van het punt A resp. B op het kanaalprofiel.

De boven behandelde oplossingsmethode zullen we nu toepassen op het speciale geval, waarin de constanten van het beschouwde systeem door (1) worden gegeven. Het punt A heeft nu de coördinaten $a_1=4,5$ en $d=21$. Het punt B heeft de coördinaten $b_1=2,5$ en $b_2=20$. Verder hebben we $a=3$, $k=11$ en $c=4000$, zodat de functiewaarden $q(f)$ kunnen worden ontleend aan de § 3 voorkomende tabel.

Wij kozen allereerst $\lambda=1$ en voerden de boven aangegeven berekeningen uit. Het bleek, dat bij stap E het linkerlid van (26) veel groter werd dan het rechterlid, zelfs tot op grote afstanden ξ van het kanaal. Blijkbaar hadden we de daling van het phreatisch oppervlak nabij het kanaal (welke bepaald wordt door λ) veel te groot aangenomen. Deze conclusie duidde op een zeer kleine waarde λ . Daarom berekenden we λ uit (32) en (33) en vonden $\lambda=0,05645$. Het berekeningsschema werd uitgevoerd voor $\lambda=0,0556$; deze keuze bleek te voldoen.

Kiest men $\lambda=0,0556$ dan vindt men achtereenvolgens

A. $\alpha=0,07460$.

B. $K^2=0,11724$; $L^2=0,00913$.

C. $c=0,3288$; $\xi_0=0,2866$.

D. $\eta_0=0,04588$.

E. Voor $\xi=13,08$ (resp. $\xi=25,54$) wordt $f=20,6131$ (resp. $f=20,4701$). Het linkerlid van (25) is dan gelijk aan 3,989 (resp. 3,285), het rechterlid gelijk 3,5464 (resp. 3,5062) en het verschil is dus gelijk aan +0,443 (resp. -0,221).

In verband hiermede kozen we toen $\xi=22,22$. Dan is $f=20,4885$ en zijn beide leden van (25) gelijk aan 3,51. De gezochte aansluiting is dus verkregen. We hebben $\xi_1=2,729$ en uit (27) volgt

(34) $\varphi(x,y)=21-0,2095 (\xi-0,2866)$.

Formule (28) geeft nu $Q_0=7,02$. Deze waarde moet nog iets worden gecorrigeerd aan de hand van formule (29), waarin $R(\xi)$ met (30) kan worden berekend. De potentiaal $\varphi(x,0)$ aan de kleilaag kan worden berekend met (34) en (31). We vinden

x	$\varphi(x,0)$
0	20,677
4	20,668
8	20,643
12	20,605
16	20,557
20	20,503
24	20,446.

Uit (30) vinden we dan ($\xi = 22,22$; $c=4000$; $a=3$) $R(\xi)=0,114$, als goede benadering van de hoeveelheid water, welke per dag door het deel $[0, \xi]$ van de kleilaag lekt. Tenslotte geeft (29) de verbeterde waarde

$$Q_0 = 7,25 \text{ m}^2/\text{dag}.$$

Daar X , K en L bekend zijn, kan men de gekozen kanaalvorm (13) berekenen. Enkele punten van het gekozen profiel zijn

x	y
0	19,773
1,5	19,851
2,5	20,000
3,5	20,265
4,5	21,000

waaronder de oorspronkelijk gegeven punten $A(4,5; 21)$ en $B(2,5; 20)$. Dit kanaalprofiel en het bijbehorende stromingspatroon zijn weergegeven in grafiek IV. Het blijkt, dat inderdaad voor $x = \xi = 22,22$ de stroomlijnen reeds nagenoeg horizontaal lopen, hetgeen meer vertrouwen geeft in de verkregen uitkomsten.

Verder vragen we naar de één-dimensionale stroming voor $x > \xi$, welke aansluit bij de gevonden twee-dimensionale stroming nabij het kanaal. We vonden in het aansluitingspunt $x=22,22$ voor de hoogte van de phreatische kromme $f=20,49$. Verder wordt wegens (8) deze kromme voor $x > 22,22$ gegeven door

$$x = x_0 + p(f).$$

Wegens $p(20,49) = -2055$ (zie de tabel in § 3) volgt nu $x_0 = 2077$. Aldus vinden we voor $x > 22$ als vergelijking van de phreatische kromme

$$x = 2077 + p(f).$$

Enige punten van deze kromme zijn

x	$f(x)$	x	$f(x)$
22	20,5	492	14
54	20	668	12
120	19	868	10
189	18	1107	8
260	17	1420	6
334	16	1960	4
411	15	2866	3,1

Zij $R(x_1; x_2)$ de hoeveelheid water, die per dag (en per strekkende meter) door het interval $[x_1; x_2]$ weglekt naar het zandpakket onder de kleilaag. We vonden reeds

$$R(0; 22, 2) = 0,114.$$

Verder hebben we

$$R(0; \infty) = \frac{1}{2} Q_0 = 3,63.$$

Algemeen geldt

$$(35) \quad R(x_1, x_2) = Q(x_2) - Q(x_1) \quad (x_1 < x_2),$$

als $Q(x)$ de hoeveelheid water voorstelt, die per dag de doorsnede met abscis x passert. Gebruik makend van (10) vonden we

$$\begin{aligned} R(0; 500) &= 1,791 \text{ m}^2/\text{dag} \\ R(500; 1000) &= 1,035 \\ R(1000; 1500) &= 0,497 \\ R(1500; 2866) &= 0,293 \\ R(2866; \infty) &= 0,009 \end{aligned}$$

In het algemeen geldt in goede benadering, dat $cR(x_1, x_2)$ gelijk is aan het oppervlak $O(x_1, x_2)$, dat wordt ingesloten door de lijnen $x=x_1$, $x=x_2$, $y=a$ en het phreatisch oppervlak (resp. kanaalprofiel). Immers

$$cR(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} [Q(x, 0) - a] dx$$

en

$$O(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} [f(x) - a] dx$$

waarin $y=f(x)$ de vergelijking is van het phreatisch oppervlak, verlengd met het kanaalprofiel). Daar steeds in goede benadering geldt

$$Q(x, 0) \sim f(x)$$

volgt nu

$$cR(x_1, x_2) \sim O(x_1, x_2).$$

De laatste betrekking geldt zelfs met het gelijktteken, wanneer het linkerlid met behulp van (35) en (10) wordt berekend, daar immers de één-dimensionale voorstelling (en dus (10)) op veronderstelling (3) berust. Dus vinden we in het speciale geval (1), daar voor $x \geq \xi$ formule (10) in goede benadering geldt,

$$O(\xi, \infty) = 4000 Q(\xi) = 14048 \text{ m}^2$$

(uit $\xi = 20,49$ en de tabel van § 3 volgt n.l. $Q(\xi) = 3,512$). Verder vindt men door berekening

$$O(0, \xi) = 390,$$

welk oppervlak vergelijkbaar is met

$$4000 R(0, \xi) = 4000 \cdot 0,114 = 456.$$

■enslotte

$$O(0, \infty) = 14437 \quad \text{en} \quad R(0, \infty) = 14504.$$